

◀2007年 神戸大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) \vec{OQ} を \vec{OP} と \vec{OR} を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき、線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

2 xy 平面において、O を原点、P を第 1 象限内の点とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) 2 点 O, P を頂点とし、 y 軸上に底辺を持つ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2) T を (1) で求めた軌跡とし、 a を実数とする。このとき、軌跡 T と直線 $y = a(x-1)$ が第 1 象限内で交点をもつような a の範囲を求めよ。

3 $f(x) = e^x - x$ について、次の間に答えよ。

(1) 実数 x について $f(x) \geq 1$ であることを示せ。

(2) t は実数とする。このとき、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t, x = t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

4
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$
 で表される曲線を C とおく。このとき、次の間に答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

5 次の間に答えよ。

(1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚、2 の数字を書いたカードを 3 枚、3 の数字を書いたカードを 3 枚、計 9 枚用意する。この中から無作為に、一度に 3 枚のカードを選んだとき、カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。

♠ 文系学部

1 次の間に答えよ。

(1) 漸化式 $x_{n+1} - a = -2x_n + 2a$ (a は定数) で定まる数列 x_1, x_2, x_3, \dots の一般項 x_n を x_1, a を用いて表せ。

(2) xy 平面において曲線 $C: y = f(x) = x^3 - 3ax^2$ (a は定数) を考える。 C 上に点 $P_1(t_1, f(t_1))$ をとる。ただし、 $t_1 \neq a$ とする。 P_1 における C の接線と C の交点のうち、 P_1 と異なるものを $P_2(t_2, f(t_2))$

とする. t_2 を t_1, a を用いて表せ.

- (3) さらに, P_2 における C の接線と C の交点のうち, P_2 と異なるものを P_3 とする. 以下同様に P_4, P_5, P_6, \dots を定める. P_1, P_2, P_3, \dots はすべて相異なることを示せ.

2 xy 平面における曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = ax$ (a は正の定数) について, 次の問に答えよ.

- (1) l と平行な, C の接線 m の方程式を a を用いて表せ.
 (2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ.
 (3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする. 線分 OP を一辺とする四角形 $OPQR$ が長方形になるように, m 上に 2 点 Q, R をとる. この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ.

3 理系学部 **5** と同じ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 標準 B ベクトル(空間)
2 基本 II 図形と方程式
3 基本 III 微分法的应用・積分法的应用
4 標準 III 積分法的应用
5 基本 A 確率

♣ 文系学部

- 1** 標準 II 微分積分・ B 数列
2 標準 II 微分積分
3 基本 A 確率

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{OR}$
(2) 証明は省略
- 2** (1) $y = \frac{1-x^2}{2}$ ($0 < x < 1$)
(2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$
- 3** (1) 証明は省略
(2) $S(t) = e^t - e^{t-1} - t + \frac{1}{2}$
(3) 最小値 $\frac{1}{2} + \log(e-1)$ ($t = \log \frac{e}{e-1}$)
- 4** (1) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$
(2) $\frac{2}{3}$
(3) $\frac{\pi^2}{4}$
- 5** (1) $\{1, 1, 1\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}, \{1, 2, 3\}$
(2) $\frac{5}{14}$

◇ 文系学部

- 1** (1) $x_n = a + (x_1 - a)(-2)^{n-1}$
(2) $t_2 = -2t_1 + 3a$
(3) 証明は省略
- 2** (1) $y = ax - \frac{a^2}{4}$
(2) $\frac{a^2}{4\sqrt{1+a^2}}$
(3) $a = 2$
- 3** 理系学部 **5** と同じ.