

## ◀2001年 熊本大学(前期)▶

## ♠ 理系学部

**1** 次の問いに答えよ。

- (1)  $x < 0$  のとき,  $e^{-x}$  と  $x^2 + 1$  の大小関係を調べよ。  
 (2) 2つの曲線  $y = xe^{-x}$ ,  $y = x(x^2 + 1)$  と直線  $x = -1$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

**2** 座標平面上の点  $P_n(n, 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  に対して, 点  $P_1$  から原点  $O$  と点  $P_n(n \geq 2)$  を通る直線へ下ろした垂線を  $P_1Q_n$  とし, 2つのベクトル  $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{Q_nP_1}$  のなす角を  $\theta_n$  とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{Q_nP_1}$  の成分を求めよ。  
 (2)  $\cos \theta_n$  を求めよ。  
 (3)  $\tan \theta_n < 1.01$  をみたす最小の  $n$  の値を求めよ。

**3**  $a$  を整数とする。  $x_n = n^3 - an^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定められる数列  $\{x_n\}$  が

$$x_1 > x_2 > \dots > x_{14} > x_{15}, \quad x_{15} < x_{16} < x_{17} < \dots$$

をみたすとき,  $a$  を求めよ。

**4** 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて, それらは 1 の札が 1 枚, 2 の札が 2 枚, 3 の札が 3 枚, 4 の札が 4 枚, 5 の札が 5 枚からなる。袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき, 札に書かれている数の和を  $S$  とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $S$  が 2 の倍数である確率を求めよ。  
 (2)  $S$  が 3 の倍数である確率を求めよ。

## ♠ 文系学部

**1** 点  $(x, y)$  が連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を動くとき,  $x^2 + y^2 - 4y$  の最大値と最小値を求めよ。

**2**  $a$  を正の定数とし, 放物線  $y = x^2$  の  $x \geq 0$  の部分が表す曲線を  $C$  とする。また  $a < t$  をみたす  $t$  に対して, 曲線  $C$  と 2つの直線  $x = a$ ,  $y = t^2$  によって囲まれる図形の面積を  $S(t)$  とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $\frac{S(t)}{S\left(\frac{t+a}{2}\right)}$  を  $a, t$  で表せ。  
 (2)  $\frac{S(t)}{S\left(\frac{t+a}{2}\right)} < 8$  を示せ。

**3** 理系学部 **2** と同じ。

**4** 袋の中に 1 から 5 までのいずれかの数字を書いた同じ形の札が 15 枚入っていて, それらは 1 の札が 1

枚, 2 の札が 2 枚, 3 の札が 3 枚, 4 の札が 4 枚, 5 の札が 5 枚からなる. 袋の中からこれらの札のうち 3 枚を同時にとり出すとき, 札に書かれている数の和が偶数, 奇数である確率をそれぞれ求めよ.

**出題範囲と難易度****♣ 理系学部**

- ❶ 基本  III 微分法の応用・積分法の応用
- ❷ 標準  B ベクトル (平面)
- ❸ 標準  A 数列
- ❹ 標準  I 確率

**♣ 文系学部**

- ❶ 標準  II 図形と方程式
- ❷ 標準  II 微分積分
- ❸ 標準  B ベクトル (平面)
- ❹ 標準  I 確率

**略解**

## ◇ 理系学部

**1** (1)  $e^{-x} > x^2 + 1$

(2)  $\frac{1}{4}$

**2** (1)  $\overrightarrow{Q_n P_1} = \left( -\frac{n-1}{n^2+1}, \frac{n(n-1)}{n^2+1} \right)$

(2)  $\cos \theta_n = \frac{n-1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$

(3)  $n = 202$

**3**  $a = 22$  または  $a = 23$

**4** (1)  $\frac{236}{455}$

(2)  $\frac{151}{455}$

## ◇ 文系学部

**1** 
$$\begin{cases} \text{最大値: } 5 & (x, y) = (0, -1) \\ \text{最小値: } -\frac{7}{2} & (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

**2** (1)  $\frac{S(t)}{S\left(\frac{t+a}{2}\right)} = \frac{4(2t+a)}{t+2a}$

(2) 証明は省略

**3** 理系学部 **2** と同じ.

**4** (1)  $\frac{236}{455}$

(2)  $\frac{219}{455}$