

## ◀ 2005 年 熊本大学 (前期) ▶

## ♠ 理系学部

**1** 座標空間内に 4 点  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 1)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(3, 2, 0)$  を考え、線分  $CD$  上の点  $P(x, 2, 0)$  に対して、三角形  $PAB$  の面積を  $S$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\angle APB = \theta$  とするとき、 $\cos \theta$  を  $x$  で表せ。
- (2)  $S$  の最小値を求めよ。

**2** ボタンを 1 回押すごとに、画面に 1, 2, 3, 4 のいずれかの数を表示する機械がある。この機械が数  $X$  を表示する確率は次のとおりである。

$X$	1	2	3	4
確率	$2a$	$b$	$b$	$a$

次の問いに答えよ。

- (1)  $b$  を  $a$  で表せ。
- (2) ボタンを 2 回押したときに表示される数のうち小さくないほうの数を  $Z$  とするとき、 $Z$  の期待値  $m$  を  $a$  で表せ。
- (3)  $m$  を最大にする  $a$  の値を求めよ。

**3** 座標平面において、 $x$  軸上の点列  $\{P_n\}$  と曲線  $C: y = \frac{1}{x^2}$  上の点列  $\{Q_n\}$  を次のように定める。  
 $P_1(a, 0)$  ( $a > 0$ ) とする。 $P_n$  ( $n \geq 1$ ) が定まったとき、 $P_n$  を通り  $y$  軸に平行な直線と  $C$  との交点を  $Q_n$  とする。 $Q_n$  における  $C$  の接線と  $x$  軸との交点を  $P_{n+1}$  とする。

次の問いに答えよ。

- (1)  $P_n(a_n, 0)$  とするとき、 $a_n$  を  $a$  で表せ。
- (2) 三角形  $P_n P_{n+1} Q_n$  の面積を  $S_n$  とするとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を  $a$  で表せ。

**4** 平面上の点の直交座標を  $(x, y)$ 、極座標を  $(r, \theta)$  とする。極方程式  $r = f(\theta)$  によって表される曲線  $C$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  上の点  $(x, y)$  について、 $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$  を  $f(\theta)$ ,  $f'(\theta)$  を用いて表せ。
- (2)  $f(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$  のとき、曲線  $C$  の  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の部分の長さを求めよ。

## ♠ 文系学部

**1** 座標平面上の点  $P$  から放物線  $y = x^2$  へ 2 本の接線が引けて、かつ、この 2 本の接線が直交するような点  $P$  の軌跡を求めよ。

**2** 次の問いに答えよ。

- (1) 三角関数の加法定理またはド・モアブルの定理を用いて、任意の角  $\theta$  に対し、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

(2)  $\theta = 18^\circ$  のとき,  $\cos 2\theta = \sin 3\theta$  が成り立つことを示せ.

(3)  $\sin 18^\circ$  の値を求めよ.

**3** 理系学部 **1** と同じ.

**4** 理系学部 **2** と同じ.

### 出題範囲と難易度

#### ♣ 理系学部

- 1** 基本  B ベクトル (空間)
- 2** 標準  I 確率
- 3** 標準  III 数列の極限
- 4** 標準  C いろいろな曲線・ III 積分法の応用

#### ♣ 文系学部

- 1** 基本  II 図形と方程式
- 2** 標準  II 三角関数
- 3** 基本  B ベクトル (空間)
- 4** 標準  I 確率

## 略解

### ◇ 理系学部

$$\mathbf{1} \quad (1) \quad \cos \theta = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 1)}}$$

$$(2) \quad \text{最小値} : \frac{\sqrt{70}}{5} \quad \left(x = \frac{3}{5}\right)$$

$$\mathbf{2} \quad (1) \quad b = \frac{1 - 3a}{2}$$

$$(2) \quad m = -\frac{21}{4}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{11}{4}$$

$$(3) \quad a = \frac{1}{7}$$

$$\mathbf{3} \quad (1) \quad a_n = a \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{3}{4a}$$

$$\mathbf{4} \quad (1) \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

### ◇ 文系学部

$$\mathbf{1} \quad \text{直線} : y = -\frac{1}{4}$$

$\mathbf{2} \quad (1) \quad$  証明は省略

$(2) \quad$  証明は省略

$$(3) \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$\mathbf{3} \quad$  理系学部  $\mathbf{1}$  と同じ .

$\mathbf{4} \quad$  理系学部  $\mathbf{2}$  と同じ .