

◀1997年 岡山大学(前期)▶

♠ 理系学部

注：①～③は共通問題．④, ⑤から1題を選択して解答．

① 辺の長さがすべて a の正四角錐と正四面体が与えられている． xyz 空間の中にこの正四角錐を，原点 O と $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C(0, a, 0)$ で作られる正方形 $OABC$ を底面とし，残りの頂点 D を z 座標が正となるようにおく．正四面体をその1つの面が正四角錐 $OABCD$ の側面 BCD に外側からぴったり重なるようにおき，正四面体の残りの頂点を E とする．このとき，点 O, A, B, C, D, E を頂点とする多面体を P とする．

- (1) 点 D の座標を求めよ．
- (2) 点 E の座標を求めよ．
- (3) 多面体 P は l 個の三角形と m 個の四角形に囲まれた n 面体となっている．この l, m, n を求め，その理由を述べよ．

② a は $a > \frac{1}{2}$ をみたす定数とする． $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = 2x(a - x), \quad g(x) = f(f(x))$$

と定める．

- (1) 方程式 $f(x) = x$ の解を求めよ．
- (2) 方程式 $g(x) = x$ の解を求めよ．
- (3) 方程式 $g(x) = x$ が重解をもつような a の値を求めよ．
- (4) a が (3) で求めた値のとき，関数 $y = g(x) - x$ の増減と極値，凹凸と変曲点を調べ，そのグラフをかけ．

③ a, b は $a > b > 0$ をみたす定数とする． O を原点とする xy 平面上の

$$\text{楕円} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{円} : x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{円} : x^2 + y^2 = b^2$$

の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分をそれぞれ E, C_1, C_2 とする．点 $A(a, 0), B(b, 0)$ をとる． E 上の点 $X(s, t)$ に対して，直線 $x = s$ と C_1 との交点を P_1 ，直線 $y = t$ と C_2 との交点を P_2 ，直線 OX と C_2 との交点を Q とする． OA と OX のなす角を α ， OA と OP_1 のなす角を β とする． E の弧 AX と2つの線分 OA, OX で囲まれる図形の面積を S ， C_2 の弧 BQ と2つの線分 OB, OQ で囲まれる図形の面積を T とする．

- (1) 3点 O, P_1, P_2 が一直線上にあることを示せ．
- (2) E 上で X が A に限りなく近づくとき， $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ の極限値を求めよ．
- (3) S を β の式で表せ．
- (4) E 上で X が A に限りなく近づくとき， $\frac{S}{T}$ の極限値を求めよ．

④ 複素数 z に対して， O を原点とする座標空間内の点 P を

$$P \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

で定める．また，定数 α は絶対値が1の複素数であるとし，座標空間内に点

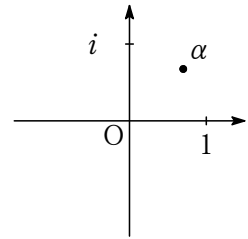
$$A \left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \frac{-i(\alpha - \bar{\alpha})}{2}, 0 \right)$$

をとる．ただし， i は虚数単位である．

- (1) ベクトル \vec{OP} の大きさは 1 であることを示せ .
- (2) w を $-\alpha$ でない複素数とし, $z = \frac{w-\alpha}{\alpha w+1}$ とする . w の絶対値が 1 ならば, この z は $|z+\alpha| = |z-\alpha|$ ……①

をみたすことを示せ .

- (3) 解答欄に与えられた複素数平面上の α (右図) に対して, ① をみたす z の表す点がえがく図形を図示せよ .



- (4) ① をみたす z に対して, \vec{OP} と \vec{OA} は垂直であることを示せ .

5 n を 3 以上の自然数とする . n 角柱の頂点上を, 1 秒ごとに, 隣接する 3 頂点のどれか 1 つに等しい確率 $\frac{1}{3}$ で移る動点を考える . この動点が頂点 A を出発して k 秒後に頂点 A にいる確率を $P_{n,k}$ で表す .

- (1) $P_{3,3}$ と $P_{3,4}$ を求めよ .
- (2) n が偶数で k が奇数ならば, $P_{n,k} = 0$ であることを証明せよ .

♠ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ .

2 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1, a_{n+1} = (a_n)^2 + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める .

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ .
- (2) 自然数 m に対して, a_{3m} は 5 で割り切れることを証明せよ .

3 a は $a > 1$ をみたす定数とする . 2 次式 $P(x)$ を $P(x) = x(a-x)$ と定める .

- (1) 多項式 $Q(x) = P(P(x))$ を求めよ .
- (2) 方程式 $P(x) = x$ の解は方程式 $Q(x) = x$ をみたすことを示せ .
- (3) 方程式 $Q(x) = x$ が異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲, およびその解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (ただし, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$ とする) を求めよ .
- (4) a が (3) で求めた範囲内にあるとき $\alpha_2 + \alpha_4 = 5$ になるような a の値を求めよ . このとき, $Q(x) - x = xf(x)$ で定まる $f(x)$ について, 関数 $y = f(x)$ の増減と極値を調べ, 区間 $1 \leq x \leq 4$ の範囲におけるグラフをかけ .

4 方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解を α, β とする .

- (1) 複素数 α, β を極形式で表せ .
- (2) α の 3 乗根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および β の 3 乗根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を極形式で表し, 複素数平面上にそれらの表す点を図示せよ .
- (3) $x^6 + x^3 + 1 = 0$ は, α の 3 乗根の 2 乗 $(\alpha_1)^2, (\alpha_2)^2, (\alpha_3)^2$ と β の 3 乗根の 2 乗 $(\beta_1)^2, (\beta_2)^2, (\beta_3)^2$ のすべてを解とする方程式のうちで次数の最も低いものとなっていることを示せ .

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1 標準 B 空間ベクトル
- 2 標準 B · III 微分積分・微分法
- 3 標準 III · C 関数の極限・いろいろな曲線
- 4 標準 B 複素数と複素数平面
- 5 標準 B 確率分布

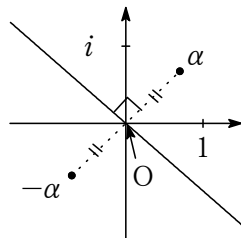
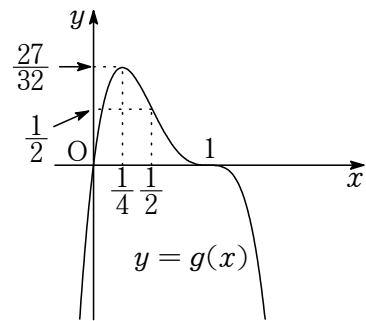
♣ 文系学部

- 1 標準 B 空間ベクトル
- 2 基本 A 数列
- 3 標準 II 高次方程式・微分積分
- 4 標準 B 複素数と複素数平面

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) $D\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$
 (2) $E\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$
 (3) $l = 2, m = 3, n = 5$ (理由は省略)
- 2** (1) $x = 0, \frac{2a-1}{2}$
 (2) $x = 0, \frac{2a-1}{2}, \frac{2a+1 \pm \sqrt{(2a-3)(2a+1)}}{4}$
 (3) $a = \frac{3}{2}$
 (4) 極大値 $\frac{27}{32}$ ($x = \frac{1}{4}$), 変曲点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 0)$
- 3** (1) 証明は省略
 (2) $\lim_{X \rightarrow A} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b}{a}$
 (3) $S = \frac{1}{2} ab \beta$
 (4) $\lim_{X \rightarrow A} \frac{S}{T} = \frac{a^2}{b^2}$
- 4** (1) 証明は省略
 (2) 証明は省略
 (3)
- (4) 証明は省略
- 5** (1) $P_{3,3} = \frac{2}{27}, P_{3,4} = \frac{19}{81}$
 (2) 証明は省略



◇ 文系学部

1 理系学部 1 と同じ .

2 (1) $a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 26, a_5 = 677, a_6 = 458330$

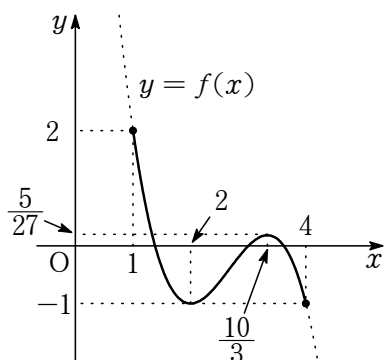
(2) 証明は省略

3 (1) $Q(x) = -x(x-a)(x^2 - ax + a)$

(2) 証明は省略

(3) $a > 3, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}, \alpha_3 = a-1, \alpha_4 = \frac{a+1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$

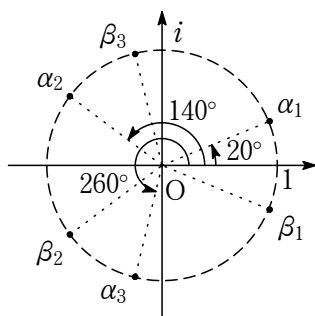
(4) $a = 4, \text{極大値 } \frac{5}{27} \left(x = \frac{10}{3}\right), \text{極小値 } -1 (x = 2)$



4 (1) $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ, \beta = \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)$ (α と β が逆でも可)

$$(2) \begin{cases} \alpha_1 = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ \\ \alpha_2 = \cos 140^\circ + i \sin 140^\circ \\ \alpha_3 = \cos 260^\circ + i \sin 260^\circ \end{cases}, \begin{cases} \beta_1 = \cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ) \\ \beta_2 = \cos(-140^\circ) + i \sin(-140^\circ) \\ \beta_3 = \cos(-260^\circ) + i \sin(-260^\circ) \end{cases}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が入れ替わっていても可 . $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ が入れ替わっていても可 .)



(3) 証明は省略