

◀1999年 大阪大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 曲線 $C: y = e^x$ と直線 $l: y = ax + b$ ($a > 0$) が 2 点 $P(x_1, y_1)$ と $Q(x_2, y_2)$ で交わっている。ただし, $x_1 < x_2$ とする。

(1) $x_2 - x_1 = c$ とおくと、 y_1 と y_2 を a と c を用いて表せ。

(2) P と Q の距離が 1 であるとする。曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = x_1, x = x_2$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を $V(a)$ とおくと、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V(a)}{a}$$

を求めよ。

2 xy 平面上の点 (a, b) は、 a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。 xy 平面において、3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし、必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってよい。

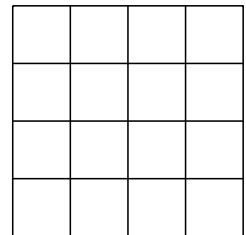
3 平面上に、点 O を中心とし点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ を頂点とする正六角形がある。 O を通りその平面上にある直線 l を考え、各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする。このとき

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2$$

は l によらず一定であることを示し、その値を求めよ。ただし、 $OA_k = r$ とする。

4 xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても、平面 $z = a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0, 0, a), (1, 0, a), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a\right)$ を頂点とする正三角形である。また、どのような a に対しても、平面 $y = a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0, a, 0), \left(0, a, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(1, a, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。このとき、立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

5 一辺の長さが 4 の正方形の紙の表(おもて)を、図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し、 A と B の 2 人に渡す。 A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと、両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても、塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし、2 枚の紙を重ね合わせる際には、それぞれの紙を回転させてもよいが、紙の四隅は合わせることとする。



♠ 文系学部

1 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上で、次の不等式を満たす点 (x, y) の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10} x} + \log_{1000} \left(\frac{1}{100} \right)^x + 10^{(\log_{10} y - \log_{10} 3)} \leq 0$$

(2) 点 (x, y) が (1) の領域を動くとき、

$$u = \sin(360^\circ \times (x + y)) - \sqrt{3} \cos(360^\circ \times (x + y))$$

がとる値の範囲を求めよ。

2 放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ 上の原点以外の点 P における C の接線を l_1 とし, P を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする. また, l_2 と C が再び交わる点を Q とし, Q における C の接線を l_3 とする. さらに, l_1 と l_3 との交点を R とする.

- (1) 点 $R(x, y)$ について, y を x の式で表せ.
- (2) $PR \geq PQ$ となる点 P の x 座標の範囲を求めよ.

3 正の整数の組 (a, b) で, a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ. ただし, $a < b$ とする.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 標準 III 積分法の応用
- 2** 標準 A 集合と論理
- 3** 標準 II 三角関数
- 4** 標準 III 積分法の応用
- 5** 標準 I 確率

♣ 文系学部

- 1** 標準 II 図形と方程式・指数関数・対数関数
- 2** 標準 II 微分積分
- 3** 標準 A 整数問題・数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $y_1 = \frac{ac}{e^c - 1}, y_2 = \frac{ace^c}{e^c - 1}$

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V(a)}{a} = \pi$

2 証明は省略

3 証明は省略. $D = 3r^2$

4 $\frac{1}{4}$

5 $\frac{89}{300}$

◇ 文系学部

1 (1) $x > 0, y > 0, y \leq -3x^2 + 2x$

右図斜線部分で, 境界は x 軸上の点を除き他は含む.

(2) $-\sqrt{3} < u \leq 2$

2 (1) $y = -\frac{1}{2x^2} - 1 \quad (x \neq 0)$

(2) $x \leq -2, 2 \leq x$

3 $(a, b) = (98, 102), (59, 66), (8, 32)$

