

◀2009年 東京工業大学(前期)▶

1 点 P から放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき, 2 つの接点を A, B とし, 線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする. PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ.

2 実数 a に対し, 次の 1 次変換

$$f(x, y) = (ax + (a-2)y, (a-2)x + ay)$$

を考える. 以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ.

(1) L は点 $(0, 1)$ を通る.

(2) 点 Q が L 上にあれば, その f による像 $f(Q)$ も L 上にある.

3 N を正の整数とする. $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で, 方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか.

4 xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を l とする.

(1) l 上の点 $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り l と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.

(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする. l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

出題範囲と難易度

- 1** 標準 II 微分積分
2 標準 C 1 次変換
3 標準 I 整数問題
4 難 III 積分法の応用

略解**1**

$$\frac{1}{3}$$

2

$$a = \frac{3}{2}, 2$$

3

$$2N^2 - N \text{ (個)}$$

4

(1) $y = -x + t$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$