

## ◀2016年 東京工業大学 (前期) ▶

**1**  $a$  を正の定数とし、放物線  $y = \frac{x^2}{4}$  を  $C_1$  とする。

(1) 点  $P$  が  $C_1$  上を動くとき、 $P$  と点  $Q\left(2a, \frac{a^2}{4} - 2\right)$  の距離の最小値を求めよ。

(2)  $Q$  を中心とする円  $(x - 2a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$  を  $C_2$  とする。 $P$  が  $C_1$  上を動き、点  $R$  が  $C_2$  上を動くとき、 $P$  と  $R$  の距離の最小値を求めよ。

**2**  $\triangle ABC$  を一辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り、出た目を順に  $X, Y, Z$  とする。出た目に応じて、点  $P, Q, R$  をそれぞれ線分  $BC, CA, AB$  上に

$$\vec{BP} = \frac{X}{6}\vec{BC}, \quad \vec{CQ} = \frac{Y}{6}\vec{CA}, \quad \vec{AR} = \frac{Z}{6}\vec{AB}$$

をみたすように取る。

(1)  $\triangle PQR$  が正三角形になる確率を求めよ。

(2) 点  $B, P, R$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_1$ 、点  $C, Q, P$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_2$ 、点  $A, R, Q$  を互いに線分で結んでできる図形を  $T_3$  とする。 $T_1, T_2, T_3$  のうち、ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3)  $\triangle PQR$  の面積を  $S$  とし、 $S$  のとりうる値の最小値を  $m$  とする。 $m$  の値および  $S = m$  となる確率を求めよ。

**3** 水平な平面  $\alpha$  の上に半径  $r_1$  の球  $S_1$  と半径  $r_2$  の球  $S_2$  が乗っており、 $S_1$  と  $S_2$  は外接している。

(1)  $S_1, S_2$  が  $\alpha$  と接する点をそれぞれ  $P_1, P_2$  とする。線分  $P_1P_2$  の長さを求めよ。

(2)  $\alpha$  の上に乗っており、 $S_1$  と  $S_2$  の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と  $\alpha$  の接点は、1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。

**4**  $n$  を 2 以上の自然数とする。

(1)  $n$  が素数または 4 のとき、 $(n-1)!$  は  $n$  で割り切れないことを示せ。

(2)  $n$  が素数でなくかつ 4 でもないとき、 $(n-1)!$  は  $n$  で割り切れることを示せ。

**5** 次のように媒介変数表示された  $xy$  平面上の曲線を  $C$  とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  である。

(1)  $\frac{dx}{dt}$  および  $\frac{dy}{dt}$  を計算し、 $C$  の概形を図示せよ。

(2)  $C$  と  $x$  軸と  $y$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

**出題範囲と難易度**

- 1 標準  II 図形と方程式
- 2 標準  A 確率
- 3 標準  A 空間図形
- 4 標準  A 整数問題
- 5 標準  III 積分法の応用

**略解**

- 1** (1)  $\sqrt{a^2 + 4}$   
(2)  $\begin{cases} 0 & (a \geq 2) \\ \sqrt{a^2 + 4} - \sqrt{2}a & (0 < a < 2) \end{cases}$
- 2** (1)  $\frac{1}{36}$   
(2)  $\frac{1}{18}$   
(3)  $m = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 確率:  $\frac{1}{72}$
- 3** (1)  $P_1P_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$   
(2) 証明は省略
- 4** (1) 証明は省略  
(2) 証明は省略
- 5** (1)  $C$  の概形は右図のようになる.  
(2)  $3\pi$

