

2016年度 三重大学（前期）

医学部

試験時間：120分

1

000262

平面上の  $\triangle ABC$  と点  $O$  を考える。 $m, n$  は正の実数とする。

- (1) 辺  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $M$  とする。このとき  $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{OM}|^2$  を  $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2$  と内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  で表せ。さらに

$$\frac{mn}{m+n} |\overrightarrow{AB}|^2 + (m+n) |\overrightarrow{OM}|^2 = n |\overrightarrow{OA}|^2 + m |\overrightarrow{OB}|^2$$

を示せ。

- (2) 辺  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_1$ , 辺  $BC$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_2$ , 辺  $CA$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_3$  とする。このとき  $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$  は

$$\frac{mn}{(m+n)^2} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2) + |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

に等しいことを示せ。

- (3) (2) の  $m, n$  を変化させたとき

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OM_1}|^2 - |\overrightarrow{OM_2}|^2 - |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

の最大値を  $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{BC}|^2, |\overrightarrow{CA}|^2$  で表せ。

2

000263

$0 \leq x \leq 2$  とする。

- (1)  $\sin \pi x + \cos 2\pi x > 0$  を満たす  $x$  の範囲を求めよ。  
 (2) (1) で求めた  $x$  の範囲に対し、

$$\log_2(3+x) + \log_2(5-x) = \log_2(16-k)$$

の解がひとつだけであるような実数  $k$  の範囲を求めよ。

3

000264

以下の  $a, b, c$  はいずれも正の実数とする。

- (1) 「 $ab$  が有理数ならば、 $(a+b)^2$  は有理数である」という主張が正しければ証明し、誤りならば反例を与えよ。  
 (2)  $ab, ac, bc$  が有理数ならば、 $a^2$  は有理数であることを示し、さらに  $(a+b+c)^2$  は有理数であることを示せ。  
 (3)  $ab, ac, bc$  が有理数で、さらに  $(a+b+c)^3$  が有理数となるならば、 $a, b, c$  はそれぞれ有理数であることを示せ。

**4**

$n$  を自然数とし,  $P_k\left(\frac{k}{n}, \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) を平面上の  $n+1$  個の点とする。ただし,  $\log x$  は  $x$  の自然対数である。

(1)  $k = 1, 2, \dots, n$  のとき, 点  $P_{k-1}$  と点  $P_k$  との距離  $P_{k-1}P_k$  に対して

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}} < P_{k-1}P_k < \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)^2}}$$

を示せ。

(2)  $L_n = \sum_{k=1}^n P_{k-1}P_k$  としたとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$  を求めよ。