2017 年度　東北大学（前期）

理系学部　試験時間：150 分

1　a，b を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を ℓ とする。

(1)　ℓ が点 $(-2,\ 0)$ を通り，ℓ と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a，b の条件を求めよ。

(2)　ℓ と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

2　A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2)　A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

3　a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

4　s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2)　F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

5　α，β，γ を複素数とし，

$$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　z は

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$$

を満たすことを示せ。

(2)　$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

6　a, b, c を実数とし，

$$I(a,\,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx,\quad J(a,\,b,\,c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a \neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$I(a,\,b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\,b,\,c)$ を $I(a,\,b+c)$ と $I(a,\,b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

理系学部【略解】

1

（1）$b = 2a,\ 0<a<4$　（2）図示は省略

2

（1）$\dfrac{1}{80}$　（2）$\dfrac{28}{181}$

3

（1）24 通り　（2）22 通り

4

（1）$(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{3s}{s^2+3s+3},\ \dfrac{s^2}{s^2+3s+3}\right)$　（2）$s = \sqrt{3}$

5

（1）証明は省略　（2）$\alpha \fallingdotseq \overline{\beta}$　（$\overline{\alpha} \fallingdotseq \beta$ でも可）

6

（1）$I(a,\ b) = \dfrac{a}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{\pi a}{2}}\cos\dfrac{\pi b}{2} - 1\right) + \dfrac{b}{a^2+b^2}e^{\frac{\pi a}{2}}\sin\dfrac{\pi b}{2}$

（2）$J(a,\ b,\ c) = -\dfrac{1}{2}\{I(a,\ b+c) - I(a,\ b-c)\}$

（3）$e^{\frac{\pi}{2}} - 1$