

2017年度 筑波大学 (前期)

医学部

試験時間：120分

注：1～3は必答，4～6の中から2問の計5問を解答。

1 a を正の実数とする。2つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2点 A, B で交わる。但し、A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また、2点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

- (1) 2点 A, B の座標を a を用いて表せ。
- (2) 直線 l の方程式を a を用いて表せ。
- (3) 原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また、 $a > 0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

2 a, b, c を実数とし、 β, m をそれぞれ $0 < \beta < 1, m > 0$ を満たす実数とする。また、関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり、 $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする。

- (1) a, b, c および β, m の値を求めよ。
- (2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は、 $-1 \leq x \leq 1$ に対して $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと、 $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより、 $h(x)$ を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとする。また、 $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$ を示せ。
- (2) $b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ の一の位の数 $が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。$
- (3) a_{2017} の一の位の数 $を求めよ。$

4 関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

5 xy 平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、実数 a に対して、 a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

- (1) n を $0 \leq n \leq N$ を満たす整数とする。点 $(n, 0)$ と点 $(n, N \sin(\frac{\pi n}{2N}))$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = x$ と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = N \sin(\frac{\pi x}{2N})$ ($0 \leq x \leq N$) と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2) の $A(N)$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

6 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において、原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $P_1(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_3(w_3)$, $P_4(w_4)$, $P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり、次の 2 つの条件 (I), (II) を満たすとする。

- (I) $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ。
- (II) $\frac{w_3}{w_2}$ と $-\frac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である。

また、五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ。
- (2) S を a を用いて表せ。
- (3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする。このとき、 $R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ。

医学部【略解】

1

(1) $A\left(a, \frac{2}{3}a^3\right), B\left(3a, -\frac{2}{3}a^3\right)$

(2) $3x - 2a^2y - 6a = 0$

(3) $d = \frac{6a}{\sqrt{4a^4 + 9}}, a = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2

(1) $a = 0, b = -\frac{3}{4}, c = 0, \beta = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}$

(2) $h(x) = 0$

3

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 3

4

(1) $x = 1, 2, \frac{1}{2}$

(2) 極大値: 0, 極小値: $-\frac{1}{8}$

(3) $18 \log 2 - \frac{99}{8}$

5

(1) $\left[N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right] + 1$ 個

(2) $A(N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

(3) $\frac{4}{\pi}$

6

(1) $\frac{\pi}{2}$

(2) $S = \sin 2a + \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

(3) 証明は省略