2018 年度　北海道大学（前期）

理系学部　　試験時間：120 分

1　座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し，

$$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とおく。ただし，O は原点，s と t は実数とする。

(1)　$|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s，t で表せ。

(2)　$t=\frac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3)　s と t が実数を動くとき，$\left|\vec{p}-\vec{q}\right|$ の最小値を求めよ。

2　$z+\frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1)　D を複素数平面上に図示せよ。

(2)　k を実数とする。D に属する z で方程式

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

3　数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1)　a，b，c，d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2)　n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3)　n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。

4　座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(11,\ 11)$ がある。条件

$$\mathrm{BQ}\geqq\mathrm{OQ}\geqq 2\mathrm{AQ}$$

を満たす点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1)　D を座標平面上に図示せよ。また，$\mathrm{BQ}=\mathrm{OQ}=2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2)　$0<p\leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする。条件 $\mathrm{OQ}\geqq\mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

5　2 つの関数

$$f(x) = \cos x,\ g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。

理系学部【略解】

1

(1)　$|\overrightarrow{p}| = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$, $|\overrightarrow{q}| = \sqrt{4s^2 - 4s + 2}$, $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = -t$

(2)　$s = \dfrac{1}{2}$

(3)　最小値：$\sqrt{2}$

2

(1)　図示は省略

(2)　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3

(1)　証明は省略

(2)　$\dfrac{9}{70}$

(3)　$\dfrac{1}{7}$

4

(1)　図示は省略，(7, 4)，(14, -3)

(2)　$3 \leqq p \leqq 11$

5

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$1 + \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{\pi^3}{16}$