2018 年度　大阪市立大学（前期）

理系学部　試験時間：120 分

1　自然数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k},\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して $S_{2n}=T_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$ を求めよ。

2　n を自然数とする。$0\leqq a_k\leqq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

とおく。実数 x に対して

$$I_n(x)=b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a\geqq 0$ とする。$x\geqq 0$ に対して不等式 $1-ax\leqq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $\displaystyle\int_0^1 I_n(x)\,dx\leqq 1$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=1$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)\,dx=1$$

となることを示せ。

3　次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　定積分

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^e (\log y)^2\,dy$$

の値を求めよ。

(2)　$f(x)=\tan x$ とする。関数 $y=f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ を持つ。定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx + \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy \text{ および } \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$$

の値を求めよ。

(3)　定積分

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_1^e \sqrt{\log y}\,dy$$

の値を求めよ。

4　n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

を取る。また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$ のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する。この記法の下で，

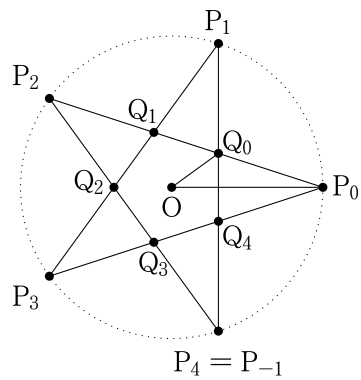
線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k　$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$

とおく。点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ および $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OQ}_0$ の値を n を用いて表せ。

(2)　(1) で求めた $\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ の値を θ_n とおく。三角形 $\mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ の面積を θ_n を用いて表せ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。



$n=2$ のとき

理系学部【略解】

1

（1）　証明は省略　（2）　$\log 2$　（3）　$\log 2$

2

（1）　証明は省略　（2）　証明は省略　（3）　証明は省略

3

（1）　e　（2）　$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$　（3）　e

4

（1）　$\angle \mathrm{OP_0Q_0}=\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$，$\angle \mathrm{P_0OQ_0}=\dfrac{\pi}{2n+1}$

（2）　$S_n=\dfrac{\sin\theta_n\sin 2\theta_n}{2\sin 3\theta_n}$　（3）　$\dfrac{\pi}{3}$