

2018年度 東京大学

理系学部

試験時間：150分

1

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

2数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。

- (1) $n \geq 2$ とする。 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geq 1$ と分子 q_n を求めよ。
- (2) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ。

3

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ をみたく部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。 $k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き、点 Q が線分 OA 上を動くとき、

$$\vec{OR} = \frac{1}{k}\vec{OP} + k\vec{OQ}$$

をみたく点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。

4 $a > 0$ とし、

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の2条件をみたく点 (a, b) の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件1: 方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ。

条件2: さらに、方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

5

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする。点 $P(z)$ は C 上にあり、点 $A(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して、点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。 $w = \frac{1}{1-u}$ とおき、 w と共役な複素数を \bar{w} で表す。

- (1) u と $\frac{\bar{w}}{w}$ を z についての整式として表し、絶対値の商 $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ。
- (2) C のうち実部が $\frac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $P(z)$ が C' 上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ。

6

座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ を考える。

$\frac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA , AB , BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を, それぞれ V_1 , V_2 , V_3 とする。

- (1) 平面 $y = t$ が V_1 , V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに, この範囲の t に対し, 平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および, 平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。
- (2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。
- (3) r は (2) の条件をみたすとする。 V_1 の体積を S とし, V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。 V_1 , V_2 , V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。
- (4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。 S と T を求め, V の体積を決定せよ。