2019年度　北海道大学（前期）

理系学部　　試験時間：120 分

1　p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり，3 点 O，A，B が定める平面を α とする。また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする。

(1)　点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2)　点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

2　n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする。さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1)　d_n は偶数であることを示せ。

(2)　d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3)　p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4)　$d_n \leqq 12$ を示せ。また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

3　t を $0<t<1$ を満たす実数とする。0，$\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(1)　$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2)　$f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ をとる。t が $0<t<1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

4　n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする。

(1)　m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。

(2)　A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

5　$f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…… を関係式

$$f_1(x)=f(x),$$
$$f_{n+1}(x)=2\cos x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(t)\sin(x-t)\,dt\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める。さらに，自然数 n に対して

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(t)\sin t\,dt,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　$c_n=a_n-1$ とおく。このとき，$c_{n+2}=-c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。

(3)　a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

理系学部【略解】

1

(1)　$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{9}(p+2),\ -\frac{2}{9}(p+2),\ \frac{4}{9}(p+2)\right)$　　(2)　$-2 \leqq p \leqq -\frac{5}{7}$

2

(1)　証明は省略　　(2)　証明は省略

(3)　証明は省略　　(4)　証明は省略，$n=8$

3

(1)　証明は省略　　(2)　放物線 $y=2x^2+1$ の $-1<x<0$ の部分

4

(1)　$\begin{cases} \dfrac{2}{n^2} & (m=1,\ 2\ \text{のとき}) \\ \dfrac{n+2}{n^2} & (m=3,\ 4,\ \cdots,\ n\ \text{のとき}) \end{cases}$　　(2)　$p_n=\dfrac{n^2+n-4}{2n^2}$

5

(1)　$\begin{cases} a_{n+1}=b_n \\ b_{n+1}=2-a_n \end{cases}$

(2)　証明は省略，$c_n=\begin{cases} (a_1-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n\ \text{が奇数のとき}) \\ (b_1-1)(-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n\ \text{が偶数のとき}) \end{cases}$

(3)　$f(x)=\cos x+\sin x$