2019 年度　大阪市立大学（前期）

理系学部　　試験時間：120 分

1　座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t，C_t で囲まれた領域を D_t とする。$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$0<t<2$ に対し，C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする。座標平面の原点を O として，半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を θ を用いて表せ。

(2)　$0<t<2$ のとき，t を θ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ。

2　0 でない複素数 z に対して

$$w=z+\frac{1}{z}$$

とおく。i を虚数単位とし，z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。また，w の実部を u，w の虚部を v とする。次の問いに答えよ。

(1)　u，v をそれぞれ r と θ を用いて表せ。

(2)　点 z が条件 $|z+1|=|z-i|$ $(0<\theta<\pi)$ を満たして複素数平面上を動くとき，u と v が満たす関係式を求め，点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。また，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}u$ と $\displaystyle\lim_{r\to 0}v$ を求めよ。

3　k は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1),\ \mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1),\ \mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，線分 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を k，s，t を用いて表せ。

(3)　(2) の内分点 P と Q で，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものが存在するとき，P と Q の座標を求めよ。また，そのような P と Q が存在するための k の条件を求めよ。

(4)　k は (3) で求めた範囲にあるとする。(3) の P，Q と線分 PQ 上の点 X に対し $\triangle\mathrm{XOA}$ と $\triangle\mathrm{XBC}$ の面積が一致するとき，その面積を求めよ。

4　自然数 n，s（$s<n$）に対して

$$I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s\,dx$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$s<n-1$ のとき，等式

$$I_n(s)=\frac{n-s}{s+1}I_n(s+1)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$I_n(s)$ を n と s を用いて表せ。

(3)　自然数 n，s（$s<n$）に対して，等式

$$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{n+1}{n-s+k+1}\,{}_s\mathrm{C}_k$$

が成り立つことを示せ。ただし，${}_s\mathrm{C}_0={}_s\mathrm{C}_s=1$ とする。

理系学部【略解】

1

（1）　$S(t)=2\theta-\sin 2\theta$　　（2）　$t=2\cos\theta$　　（3）　$\dfrac{8}{3}$

2

（1）　$u=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta,\ v=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

（2）　$\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{v^2}{2}=1,\ v<-u,\ \lim\limits_{r\to\infty}u=-\infty,\ \lim\limits_{r\to 0}v=-\infty$

3

（1）　$\vec{n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{n}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(4k-s+4t,\ -2k-s-2t+2,\ -k+s-t+1)$

（3）　$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right),\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right),\ -\dfrac{2}{3}<k<\dfrac{1}{3}$

（4）　$\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{14}}{6}$

4

（1）　証明は省略　　（2）　$I_n(s)=\dfrac{(n-s)!s!}{(n+1)!}$　　（3）　証明は省略