

## 2019年度 東京大学

## 理系学部

試験時間：150分

**1**

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left( x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left( 1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

**2**

一辺の長さが1の正方形ABCDを考える。3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, AD, CD上にあり、3点A, P, Qおよび3点P, Q, Rはどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。

$\frac{DR}{AQ}$ の最大値, 最小値を求めよ。

**3**

座標空間内に5点A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2)を考える。線分ABの中点Mと線分ADの中点Nを通り, 直線AEに平行な平面を $\alpha$ とする。さらに,  $p$ は $2 < p < 4$ をみたす実数とし, 点P( $p$ , 0, 2)を考える。

- (1) 八面体PABCDEの平面 $y = 0$ による切り口および, 平面 $\alpha$ の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 八面体PABCDEの平面 $\alpha$ による切り口が八角形となる $p$ の範囲を求めよ。
- (3) 実数 $p$ が(2)で定まる範囲にあるとする。八面体PABCDEの平面 $\alpha$ による切り口のうち $y \geq 0, z \geq 0$ の部分を点 $(x, y, z)$ が動くとき, 座標平面上で点 $(y, z)$ が動く範囲の面積を求めよ。

**4** $n$ を1以上の整数とする。

- (1)  $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 $d_n$ を求めよ。
- (2)  $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の2乗にならないことを示せ。

**5**

以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$ を1以上の整数とする。 $x$ についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は, ただ一つの実数解 $a_n$ をもつことを示せ。

- (2) (1)で定まる $a_n$ に対し,  $\cos a_n > \cos 1$ を示せ。
- (3) (1)で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

**6**

複素数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  および実数  $a, b$  が, 次の3条件をみたしながら動く。

条件1:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は相異なる。

条件2:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は4次方程式  $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$  の解である。

条件3: 複素数  $\alpha\beta + \gamma\delta$  の実部は0であり, 虚部は0でない。

- (1)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  のうち, ちょうど2つが実数であり, 残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ。
- (2)  $b$  を  $a$  で表せ。
- (3) 複素数  $\alpha + \beta$  がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。