

**2019年度 東北大学 (前期)****理系学部**

試験時間：150分

**1**  $xy$  平面における曲線  $y = \sin x$  の2つの接線が直交するとき、その交点の  $y$  座標の値をすべて求めよ。

**2**  $a$  を1ではない正の実数とし、 $n$  を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x)$$

(1)  $n = 6$  のとき、この不等式を満たす整数  $x$  をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数  $x$  が存在するための  $n$  についての必要十分条件を求めよ。

**3**  $a$  を実数とし、数列  $\{x_n\}$  を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $a > 0$  のとき、数列  $\{x_n\}$  が発散することを示せ。

(2)  $-1 < a < 0$  のとき、すべての正の整数  $n$  に対して  $-1 < x_n < 0$  が成り立つことを示せ。

(3)  $-1 < a < 0$  のとき、数列  $\{x_n\}$  の極限を調べよ。

**4** 実数を係数にもつ整式  $A(x)$  を  $x^2 + 1$  で割った余りとして得られる整式を  $[A(x)]$  と表す。

(1)  $[2x^2 + x + 3]$ ,  $[x^5 - 1]$ ,  $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]]$  をそれぞれ求めよ。

(2) 整式  $A(x)$ ,  $B(x)$  に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数  $\theta$  に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数  $a$ ,  $b$  の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。

$$[(ax + b)^4] = -1$$

**5**

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt$$

**6** 10個の玉が入っている袋から1個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉1個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉5個と白玉5個が入っているとす。この試行を $m$ 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で $k$ 個である確率を $p(m, k)$ とする。2以上の整数 $n$ に対して、以下の問いに答えよ。

- (1)  $p(n+1, 2)$ を $p(n, 2)$ と $p(n, 1)$ を用いて表せ。
- (2)  $p(n, 1)$ を求めよ。
- (3)  $p(n, 2)$ を求めよ。

## 理系学部【略解】

**1**

$$y = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ は整数})$$

**2**(1)  $a > 1$  のとき,  $x = 9, 10, 11$ ,  $0 < a < 1$  のとき,  $x = 7$ (2)  $n > 2$ **3**

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ **4**(1)  $[2x^2 + x + 3] = x + 1$ ,  $[x^5 - 1] = x - 1$ ,  $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = -2$ 

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4)  $(a, b) = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  (複号任意)**5**

(1) 証明は省略

$$(2) f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + e^x} - \frac{e^2 - e - 1}{2(e^2 - 2e - 1)} \cdot \frac{1}{1 + e^x} + \frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)}$$

**6**

$$(1) p(n+1, 2) = \frac{7}{10} p(n, 2) + \frac{2}{5} p(n, 1)$$

$$(2) p(n, 1) = 5 \left\{ \left( \frac{3}{5} \right)^n - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$(3) p(n, 2) = 10 \left( \frac{7}{10} \right)^n - 20 \left( \frac{3}{5} \right)^n + 10 \left( \frac{1}{2} \right)^n$$