2019 年度　筑波大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

✏注：**1**〜**3**は必答，**4**〜**6**の中から 2 問の計 5 問を解答。

1　$k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y=x^2-kx$ と直線 $\ell: y=(\tan\theta)x$ の交点のうち，原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を ℓ_1 とし，点 P における接線を ℓ_2 とする。直線 ℓ_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，直線 ℓ_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を求めよ。

(2)　$\tan\theta$ を求めよ。

(3)　直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とする。$\angle \mathrm{PQO}=\alpha$（ただし $0 \leqq \alpha \leqq \pi$）とするとき，$\tan\alpha$ を求めよ。

2　以下の問いに答えよ。

(1)　a，b，c，x，y，z，M は正の実数とする。$\dfrac{x}{a}$，$\dfrac{y}{b}$，$\dfrac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき，

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq M$$

であることを示せ。

(2)　$\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

(3)　n が正の整数のとき，

$$1<\frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}<2^n$$

であることを示せ。

3　四面体 OABC について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ および $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}$ が成り立つとする。$0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数 s，t に対し，辺 OA を $s:1-s$ に内分する点を D とし，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 F，G をとり，線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし，その交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=s$ であることを示し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるとき，$\cos\theta$ を s を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DG}}$ かつ $\sqrt{3}\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$ であるとき，s の値を求めよ。

4　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = 1 + \sin x,\ g(x) = -1 - \cos x$$

と定める。

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$|f(x)| = |g(x)|$ を満たす x を求めよ。

(2)　曲線 $y = f(x)$，曲線 $y = g(x)$，直線 $x = 0$ および直線 $x = \pi$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5　数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{2^n}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t > 0$ のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$ であることを示せ。

(2)　数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ。

6　$|z|^2 + 3 = 2(z + \overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

(1)　集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2)　A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

医学部【略解】

1

（1）$k=\dfrac{1}{3}$　（2）$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$　（3）$\tan\alpha=-3$

2

（1）証明は省略　（2）$\log_2 5>\log_3 5$　（3）証明は省略

3

（1）証明は省略，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{s+1}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$　（2）$\cos\theta=\dfrac{2s-1}{s^2-2s+3}$

（3）$s=\dfrac{1}{2}$

4

（1）$x=\dfrac{\pi}{4}$　（2）$\dfrac{3\pi+4\sqrt{2}+5}{2}\pi$

5

（1）証明は省略　（2）証明は省略　（3）$\log(e-1)$

6

（1）図示は省略　（2）$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$　（3）20 個