

2020年度 北海道大学 (前期)

理系学部

試験時間：120分

1 三角形 ABC について

$$|\vec{AB}| = 1, |\vec{AC}| = 2, |\vec{BC}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

- (1) \vec{AB} と \vec{AC} の内積を求めよ。
- (2) $\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。
- (3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

2 座標平面上の 2 点 $(\frac{1}{16}, 0)$, $(0, \frac{1}{9})$ を通る直線 l を考える。

- (1) l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。
- (2) l 上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を A とする。また、 l 上の A 以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を B とする。さらに、A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上有る格子点の個数を求めよ。

3 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする。

- (1) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
- (2) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
- (3) X_1, X_2, \dots, X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

4 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし、 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されるとき、次の問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくと、すべての自然数 n に対して、 $b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

5 a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)} dt = ax$$

さらに, $f(0) = \frac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに, $\lim_{a \rightarrow +0} S(a)$ を求めよ。

理系学部【略解】

1

(1) $-\frac{1}{2}$

(2) $s = \frac{8}{5}, t = \frac{6}{5}$

(3) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

2

(1) $(-9k + 4, 16k - 7)$ (k は任意の整数)

(2) 86

3

(1) $\frac{2^n - 1}{6^n}$

(2) $\frac{6^n - 2^n - 3^n}{6^n}$

(3) $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$

4

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

5

(1) $f(x) = \frac{e^{ax}}{2 + e^{ax}}$

(2) $S(a) = \frac{1}{a} \log \frac{2 + e^a}{3}, \lim_{a \rightarrow +0} S(a) = \frac{1}{3}$