

2020年度 大阪市立大学 (前期)

理系学部

試験時間：120分

1 α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数とする。 xy 平面において、 $y = \sin x$ のグラフと $y = \sin(x - \alpha)$ のグラフの交点のうち、 x 座標が正で最小のものを P とおく。次の問いに答えよ。

- (1) P の座標を α を用いて表せ。
- (2) P の x 座標を c とする。曲線 $y = \sin x$ ($\alpha \leq x \leq c$)、曲線 $y = \sin(x - \alpha)$ ($\alpha \leq x \leq c$) と直線 $x = \alpha$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ。
- (3) α が $0 < \alpha < \pi$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ。

2 p, q を実数とする。3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + px + q = 0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 虚数解の 1 つを α とするとき、 α と共役な複素数 $\bar{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。
- (2) α の実部を r とする。 $|\alpha - \bar{\alpha}| = |\alpha - b| = 2\sqrt{3}$ のとき、 $|r - b|$ を求めよ。
- (3) (2) の仮定の下で、可能な実数の組 (p, q) をすべて求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) $1 < m \leq n$ を満たす自然数 m, n に対し、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

- (2) $\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ。ただし、実数 x に対して a が x の整数部分であるとは、 a が整数であって $a \leq x < a + 1$ が成り立つことをいう。また、正の実数 x の自然対数を $\log x$ とし、 $\log 2 = 0.69$, $\log 3 = 1.10$, $\log 2020 = 7.61$ とする。

4 座標空間内に 3 点 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$ をとる。 $\triangle ABC$ の重心を通り xy 平面に垂直な直線を ℓ とする。また、点 $P(p, q, r)$ は

$$r > 0, \vec{AB} \cdot \vec{AP} = 0, \vec{AP} \cdot \vec{CP} = 4$$

を満たしているものとする。次の問いに答えよ。

- (1) p および r を q を用いて表せ。また、 q がとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 線分 BP の中点を M とする。また、 ℓ 上に点 N を \vec{BP} と \vec{MN} が垂直になるようにとる。 N の座標を q を用いて表せ。
- (3) N の z 座標が最小になるときの q の値を求めよ。

理系学部【略解】

1

(1) $P\left(\frac{\pi + \alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)$

(2) $V(\alpha) = \frac{\pi}{4}(2 \sin \alpha + \sin 2\alpha)$

(3) 最大値: $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

2

(1) 証明は省略

(2) 3

(3) $(p, q) = (3, 7), (3, -9)$ **3**

(1) 証明は省略

(2) 8

4

(1) $p = \sqrt{3}q + \sqrt{3}, r = \sqrt{-4q^2 - 6q + 4}, -2 < q < \frac{1}{2}$

(2) $N\left(0, 1, \frac{2 - q}{\sqrt{-4q^2 - 6q + 4}}\right)$

(3) $q = -\frac{2}{11}$