

## 2020年度 東北大学 (前期)

理系学部

試験時間：150分

**1**  $AB = 1$ ,  $AC = 1$ ,  $BC = \frac{1}{2}$  である  $\triangle ABC$  の頂点  $B$  から辺  $AC$  に下ろした垂線と辺  $AC$  との交点を  $H$  とする。

- (1)  $\angle BAC$  を  $\theta$  と表すとき,  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  の値を求めよ。
- (2) 実数  $s$  は  $0 < s < 1$  の範囲を動くとする。辺  $BH$  を  $s : (1 - s)$  に内分する点を  $P$  とするとき,  $AP^2 + BP^2 + CP^2$  の最小値およびそのときの  $s$  の値を求めよ。

**2**  $a$  を  $0$  でない実数とする。 $xy$  平面において, 円  $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ , 直線  $L : -4x + 3y + a = 0$ , 直線  $M : 3x + 4y - 7a = 0$  を考える。

- (1)  $L$  と  $M$  の交点が  $C$  上にあるような  $a$  の値を求めよ。
- (2)  $C$  と  $L$  が異なる 2 つの共有点をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (3) 集合  $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$  の要素の個数が 3 となるような  $a$  の値をすべて求めよ。

**3**  $n$  を正の整数,  $a, b$  を  $0$  以上の整数とする。

- (1)  $n \geq 3$  のとき不等式  $2^n + n^2 + 8 < 3^n$  が成り立つことを示せ。
- (2) 不等式  $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$  を満たす  $n$  をすべて求めよ。
- (3) 等式  $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$  を満たす  $a, b, n$  の組  $(a, b, n)$  をすべて求めよ。

**4** 白玉 3 個, 赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し, 硬貨を投げて表が出たら, その玉を手元に残し, 裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また, 最初手元に玉はないものとする。

- (1) 2 回の試行の結果, 手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。
- (2) 3 回の試行の結果, 手元の玉が白玉 1 個, 赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。
- (3)  $n$  を 5 以上の整数とし, ちょうど  $n$  回目で試行が停止する確率  $p_n$  を求めよ。
- (4) (3) の確率  $p_n$  が最大となる  $n$  を求めよ。

**5** 実数  $t$  に対して複素数  $z = \frac{-1}{t+i}$  を考える。ただし,  $i$  は虚数単位とする。

- (1)  $z$  の実部と虚部をそれぞれ  $t$  を用いて表せ。
- (2) 絶対値  $\left| z - \frac{i}{2} \right|$  を求めよ。
- (3) 実数  $t$  が  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき, 点  $z$  はどのような図形を描くか, 複素数平面上に図示せよ。

**6** 正の整数  $m, n$  に対して実数  $A(m, n)$  を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

(2)  $A(m, 1)$  を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

(4)  $m$  または  $n$  が奇数ならば,  $A(m, n)$  は有理数であることを示せ。

## 理系学部【略解】

**1**

(1)  $\cos \theta = \frac{7}{8}, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$

(2) 最小値:  $\frac{15}{16} \left( s = \frac{2}{3} \right)$

**2**

(1)  $a = 1$

(2)  $a < -3, \frac{3}{4} < a$

(3)  $a = -8, \frac{8}{9}, 1$

**3**

(1) 証明は省略

(2)  $n = 1, 2$

(3)

$(a, b, n) = (0, 8, 1), (1, 7, 1), (2, 6, 1), (3, 5, 1), (4, 4, 1), (5, 3, 1),$

$(6, 2, 1), (7, 1, 1), (8, 0, 1), (0, 7, 2), (1, 5, 2), (2, 3, 2), (3, 1, 2)$

**4**

(1)  $\frac{3}{40}$

(2)  $\frac{9}{40}$

(3)  $p_n = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{3 \cdot 2^{n+3}}$

(4)  $n = 8, 9$

**5**

(1)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{-t}{t^2+1}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{t^2+1}$

(2)  $\frac{1}{2}$

(3) 円:  $\left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$  かつ  $|\operatorname{Im}(z)| \geq |\operatorname{Re}(z)|, \operatorname{Im}(z) \neq 0$  を満たす範囲, 図示は省略**6**

(1) 証明は省略

(2)  $\frac{1}{m+1}$

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略