

問題 n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = \sqrt{x}$ ($x > 0$) は上に凸であることを示せ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} < \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}} - 1)$$

(3) 次の不等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} > \frac{2}{3} \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{2}{3}n \right\}$ を求めよ。