

**問題**  $a$  を  $0 < a < 1$  となる定数とする。  $x \geq 0$  で定義される関数  $f(x)$  が

$$\int_0^x f(t) dt = -1 + e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-x} \int_0^x e^t f(x-t) dt$$

をみたしているとき、以下の問に答えよ。

(1) 置換積分を用いて次を示せ。

$$\int_0^x e^t f(x-t) dt = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

(2) 関数  $f(x)$  を求めよ。

(3) 関数  $f(x)$  の、  $x \geq 0$  における最小値を求めよ。