

2020年度 岐阜大学 後期理系 第3問

問題 k は正の定数とする。正の実数 t について、 xy 平面上の点

$$O(0, 0), A\left(t + \log \frac{k+1}{k}, 0\right), B(0, e^{-t}), C\left(t + \log \frac{k+1}{k}, e^{-t}\right)$$

を考える。長方形 OACB で囲まれた領域を T_0 とする。 xy 平面上の領域

$$T_1 : 0 \leq y \leq e^{-x}, T_2 : y \geq e^{-x}$$

を考える。 T_0 と T_1 の共通部分の面積を S_1 , T_0 と T_2 の共通部分の面積を S_2 とする。以下の問に答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 線分 AC と曲線 $y = e^{-x}$ の交点 P, および線分 BC と曲線 $y = e^{-x}$ の交点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) S_1, S_2 を t, k を用いて表せ。
- (3) $G = S_1 - kS_2$ とおく。 G を t で微分せよ。
- (4) t が正の実数を動くとき, (3) で定めた G の最大値 M を k を用いて表せ。
- (5) k は正の実数を動くとする。(4) で求めた M を k の関数とみなして $M(k)$ と表す。 $\lim_{k \rightarrow \infty} M(k)$ および

$$\lim_{k \rightarrow +0} M(k) \text{ を求めよ。ただし, } \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e, \lim_{h \rightarrow +0} h \log h = 0 \text{ を用いてよい。}$$