2024年度　鹿児島大学　前期理系　第３問-1

問題　$c \geqq 3$ である実数 c に対して，x の2次方程式

$$x^2-2(c+1)x+c^2-2c+9=0 \quad \cdots\cdots①$$

を考える。

(1)　2次方程式①は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ。

(1) の結果を用いて，次のように数列 $\{a_n\}$ を定める。$a_1=3$ とする。$c=a_1$ のときの方程式①の実数解のうち，a_1 より大きい方を a_2 とおく。次に $a_2>3$ が成り立つことに注意して，$c=a_2$ のときの方程式①の実数解のうち，a_2 より大きい方を a_3 とおく。これを繰り返す。すなわち，$3=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$ が成り立ち，2次方程式

$$x^2-2(a_n+1)x+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots\cdots②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} である。

(2)　$n \geqq 2$ とする。2次方程式②の実数解のうち，小さい方は a_{n-1} であることを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2 \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

(4)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。