

2024年度 鹿児島大学 前期理系 第5問

問題 n を自然数とし、次の整式を考える。

$$f(x) = x^{6n} + x^{3n} - 2,$$

$$g(x) = x^2 + x + 1, \quad h(x) = x^2 - x + 1$$

(1) 方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし、方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ。

ここで、 $f(x)$ を 2 次式で割ると、商が $(6n - 2)$ 次式、余りが 1 次以下の整式になることに注意すると

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad q(x) \text{ は } (6n - 2) \text{ 次式},$$

$$r(x) \text{ は 1 次以下の整式}$$

と書ける。

(2) $r(x) = 0$ 、つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

(3) $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば、 n は偶数であることを示せ。

(4) $n = 1$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ。