2018 年度　徳島大学　前期理系　第２問

問題　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ とする。曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上に点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ をとり，$\angle\mathrm{POQ} = \theta$ となる点 $\mathrm{Q}\left(x,\ \dfrac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ をとる。ただし，O は原点とする。

(1)　$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{\cos 2\theta}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{POQ} = \theta$ となる点 Q はちょうど 2 個存在することを示せ。また，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，その 2 点間の距離を求めよ。

(3)　点 Q を与える 2 点を $\mathrm{Q}_1\left(x_1,\ \dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(x_2,\ \dfrac{1}{x_2}\right)$ $(x_1 < x_2)$ とする。さらに，$a_1 < 0 < b_1$ とし，4 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{Q}_3\left(-x_1,\ -\dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_4\left(-x_2,\ -\dfrac{1}{x_2}\right)$ を考える。A，B，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 が原点を中心とする正六角形の頂点になるとき，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ となることを示せ。また，このときの A，B の座標を求めよ。