

2023年度 東京大学 前期理系 第6問

**問題**  $O$  を原点とする座標空間において、不等式  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ,  $|z| \leq 1$  の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$  を満たす部分を  $S$  とする。

以下、座標空間内の2点  $A, B$  が一致するとき、線分  $AB$  は点  $A$  を表すものとし、その長さを  $0$  と定める。

(1) 座標空間内の点  $P$  が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点  $P$  が動きうる範囲  $V$  の体積を求めよ。

(i)  $OP \leq \sqrt{3}$

(ii) 線分  $OP$  と  $S$  は、共有点を持たないか、点  $P$  のみを共有点に持つ。

(2) 座標空間内の点  $N$  と点  $P$  が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点  $P$  が動きうる範囲  $W$  の体積を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  を満たす実数  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) を用いてよい。

(iii)  $ON + NP \leq \sqrt{3}$

(iv) 線分  $ON$  と  $S$  は共有点を持たない。

(v) 線分  $NP$  と  $S$  は、共有点を持たないか、点  $P$  のみを共有点に持つ。