

2023年度 山梨大学 後期理系 第5問

問題 0以上の整数 n に対し、関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める。

(1) 0以上の整数 n と任意の実数 θ に対し、等式 $f_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 p, q に対し、 $I_{p,q} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'_{3p}(x) f'_{3q}(x) \sqrt{1-x^2} dx$ を求めよ。ただし、 $f'_n(x)$ は $f_n(x)$ の導関数である。

N_yamanashi2023C_05.pbm