

2024年度 京都府立医科大学 前期理系 第1問

**問題**  $x$  は  $x \neq 0, \pm 1$  である実数とし,  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$  とおく。  $c$  は実数とし,  $x$  の方程式

$$(E) \quad x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = c$$

を考える。

(1)  $f(f(f(f(x)))) = x$  であることを証明せよ。

(2)  $x = \alpha$  が方程式 (E) の実数解であるとき

$$f(\alpha), f(f(\alpha)), f(f(f(\alpha)))$$

も (E) の実数解であることを証明せよ。

(3) (E) の実数解  $x = \alpha$  に対して

$$y_1 = \alpha + f(f(\alpha)), y_2 = f(\alpha) + f(f(f(\alpha)))$$

とおく。  $y_1, y_2$  が  $y$  の2次方程式  $y^2 - cy - 4 = 0$  の解であることを証明せよ。

(4)  $c = 3$  のとき方程式 (E) を解け。