2022 年度　大阪公立大学　前期理系　第４問

問題　実数 t に対して，

$$f(t)=2\cos t+\cos 2t,\ g(t)=2\sin t-\sin 2t$$

とおく。t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち，

$$0<t<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<t<2\pi$$

の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とする。また，$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の等式を示せ。

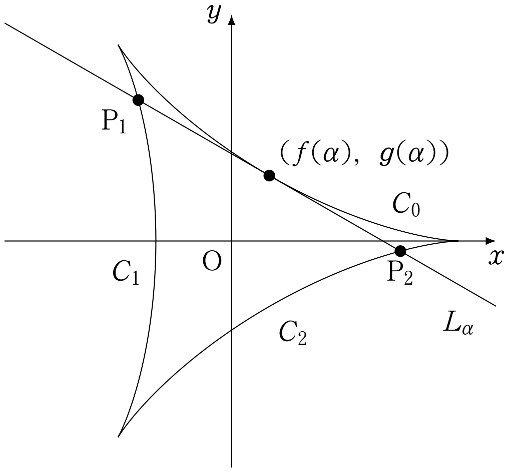
$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(2)　次の等式を示せ。

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(3)　接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す。ただし $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。このとき，θ を α を用いて表せ。

(4)　L_α と C_1 の交点を P_1 とし，L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定であることを示せ。



C_0，C_1，C_2 の概形