

問題 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ について、方程式

$$f'(x) = 0$$

がただ1つの実数解を持つことを証明せよ。

(2) (1)におけるただ1つの実数解を x_0 とする。このとき

$$a \leq x_0 \leq a + \frac{1}{4}$$

をみたす実数 a を1つ求めよ。

(3) 不等式

$$\frac{5}{8} < f(x_0) < \frac{11}{16}$$

を証明せよ。