

問題

(1) 2つの異なる自然数 m, n に対して, $\int_{-1}^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して, $\int_{-1}^1 \sin^2 n\pi x dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して, $\int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx$ を求めよ。

(4) N を自然数とし, $c_n (1 \leq n \leq N)$ を実数として, $f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\pi x$ とおく。

$c_n (1 \leq n \leq N)$ を変化させるとき, $\int_{-1}^1 (x - f(x))^2 dx$ が最小になる $c_n (1 \leq n \leq N)$ の値を求めよ。