

## 問題

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される数列  $\{a_n\}$  について、次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  に対し、 $a_n \geq 2$  であることを示せ。
- (2) ある自然数  $n$  に対して、 $a_n < \sqrt{5}$  ならば  $a_{n+1} > \sqrt{5}$ 、また、 $a_n > \sqrt{5}$  ならば  $a_{n+1} < \sqrt{5}$  であることを示せ。
- (3) すべての自然数  $n$  に対し、

$$|a_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \frac{\sqrt{5} - 2}{4} |a_n - \sqrt{5}|$$

であることを示せ。

- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。