2023 年度　獨協医科大学　前期 2 日目理系　第 4 問

問題　O を原点とする座標空間内に，底面の円の半径が 1 で高さが 1 の円柱

$$C: x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

がある。xy 平面上の直線 $y=-\dfrac{1}{2}$（$z=0$）を含み，点 $(0,\ 1,\ 1)$ を通る平面を α とする。平面 α で円柱 C を 2 つの立体に分けるとき，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を含む方の立体を K とする。また，円柱 C の側面と平面 α との交線（円柱 C の側面と平面 α との共通部分）を L とする。

曲線 L 上に点 P をとる。円 $x^2+y^2=1$（$z=0$）上の点 Q を線分 PQ が xy 平面に垂直となるような点とする。ただし，点 P が xy 平面上にあるときは，点 Q は点 P と同じ点であるとする。点 P の y 座標が t であるとき，線分 PQ の長さを t を用いて表すと

$$\mathrm{PQ}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}t+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である。

(1)　立体 K の平面 $y=t$ $\left(-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ による切断面の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\left(\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\right)\sqrt{\boxed{ケ}-t^{\boxed{コ}}}$$

であり，立体 K の体積を V とすると

$$V=\frac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\pi$$

である。

(2)　$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ とし，円 $x^2+y^2=1$（$z=0$）の $y \geqq -\dfrac{1}{2}$ の部分における弧 AQ の長さを θ とする。このとき，線分 PQ の長さを θ を用いて表すと

$$\mathrm{PQ}=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\sin\left(\theta-\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi\right)+\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$$

である。

したがって，円柱の側面のうち，円 $x^2+y^2=1$（$z=0$）の $y \geqq -\dfrac{1}{2}$ の部分と L で囲まれた部分の面積を W とすると

$$W=\frac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}+\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\pi$$

である。