

問題 数列  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は

$$a_n > 0, \sum_{k=1}^n a_k^2 = 3n^2 + 2n$$

を満たす。

(1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = \sqrt{\text{ア}n - \text{イ}}$  である。

(2)  $xy$  平面において, 点列  $P_n, Q_n, R_n$  を

$$P_n\left(a_n, \frac{1}{a_n^2}\right), Q_n\left(0, \frac{1}{a_n^2}\right), R_n(a_n, 0)$$

と定義する。四角形  $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$  の面積を  $S_n$ , 四角形  $P_nR_nR_{n+1}P_{n+1}$  の面積を  $T_n$  とする。

(i)  $S_n$  を  $n$  を用いて表すと

$$S_n = \frac{\text{ウ}\left(\sqrt{\text{エ}n - \text{オ}} + \sqrt{\text{カ}n + \text{キ}}\right)}{\left(\text{エ}n - \text{ク}\right)\left(\text{カ}n + \text{ケ}\right)}$$

である。

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T_n}{S_n}} = \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$  である。

(iii)  $t$  を実数の定数とする。  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^t S_n$  が 0 以外の有限な値  $\alpha$  に収束するとき

$$t = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}, \alpha = \frac{\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$$

である。