2024 年度　獨協医科大学　前期 1 日目理系　第 4 問

問題　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$ について，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とする。

(1)　$f(x)$ は $x=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，極大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ をとる。

また，C_1 の変曲点の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{エオ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}\right)$ である。

(2)　t を正の実数とする。xy 平面において，C_1 を x 軸方向に $-t$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とすると

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コ}}\,t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また，式 $\dfrac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5}$ を t のみの式で表すと

$$\frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5}=\frac{\left(t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}\right)^2}{\boxed{\text{セソ}}}$$

となる。C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\boxed{\text{タ}}\log\left(t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}\right)-\log\left(t^2+\boxed{\text{チ}}\right)-\boxed{\text{ツ}}\log\boxed{\text{テ}}$$

である。t が $t>0$ の範囲で変化するとき，$S(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のとき最大値をとる。