

問題  $a, b$  は正の数,  $x, y$  は実数とし

$$(a+1)^{2x} + (a+1)^{2y} = b \dots\dots (*)$$

とする。

(1)  $a = 1, b = 3, y = -x$  とする。

$t = 4^x$  とおくと, (\*) は  $t$  の式として

$$t^{\text{ア}} - \text{イ} t + \text{ウ} = 0$$

と表され, これを満たす  $t$  の値は

$$t = \frac{\text{エ} \pm \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$$

である。このとき,

$$x = \log_2 \frac{\sqrt{\text{キ}} \pm \text{ク}}{\text{ケ}}$$

である。

(2)  $y = -x + 1$  のとき, (\*) を満たす  $x, y$  が存在するための  $a, b$  の条件は

$$b \geq \text{コ} a + \text{サ}$$

である。

(3) (\*) を満たす  $x, y$  で,  $0 \leq x \leq 1$  かつ  $0 \leq y \leq 1$  であるようなものが存在するための  $a, b$  の条件は

$$\text{シ} \leq b \leq \text{ス} a^{\text{セ}} + \text{ソ} a + \text{タ}$$

である。

(4) 条件「 $0 \leq x \leq 1$  を満たす任意の  $x$  に対し, (\*) と  $0 \leq y \leq 1$  をともに満たすような  $y$  が存在する」が成り立つとき,  $a$  と  $b$  の間に成り立つ関係式は

$$b = a^{\text{チ}} + \text{ツ} a + \text{テ}$$

である。