

**問題** 次の問いに答えよ。

- (1) 正の実数  $a$ , 円周率  $\pi$  として, 実数  $x$  の関数

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x-a} - 1$$

に対して, 方程式  $f(x) = 0$  の実数解が  $x > 0$  の範囲でただ一つ存在することを証明せよ。

- (2) 実数  $x$  の関数

$$g_k(x) = 2^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^x - 1$$

とする。 $k = 4$  のとき, 方程式  $g_4(x) = 0$  の実数解を  $\beta_4$  とする。 $n_4 < \beta_4 < n_4 + 1$  を満たす整数  $n_4$  を求めよ。

- (3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{13}{8} < \log_2 \pi < \frac{5}{3}$$