

問題 a を正の実数の定数とし、 xy 平面上の2曲線

$$C_1 : y = xe^{-x}, C_2 : y = ae^{-x}$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフの概形を xy 平面上に描け (xy 平面は解答用紙にある)。ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。
- (2) $1 \leq x \leq 2$ の範囲で、 C_1 、 C_2 と2直線 $x = 1$ 、 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (3) a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。