

問題 p を 2 以上の自然数の定数とする。 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して、関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば、 $p = 2$ のとき

$$f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right)$$

$$f_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{x}{5}\right) \left(1 + \frac{x}{6}\right)$$

である。 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x > 0$) とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$ が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。
- (2) $f(x)$ を求めよ。