

2020年度 慶應義塾大学 一般理系 第3問

問題 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $g(x) = \frac{1}{\tan^2 x}$ と定める。

(1) 定数 a を $a = \boxed{\text{(あ)}}$ と定めると, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = af(2x)$$

が成り立つ。

(2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right), T_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とおく。このとき S_1 , S_2 , S_3 の値を求めると

$$S_1 = \boxed{\text{(い)}}, S_2 = \boxed{\text{(う)}}, S_3 = \boxed{\text{(え)}}$$

である。また S_n と S_{n+1} の間には $S_{n+1} = \boxed{\text{(お)}}$ の関係がある。このことから, S_n を n の式で表すと $S_n = \boxed{\text{(か)}}$ となる。また T_n を n の式で表すと $T_n = \boxed{\text{(き)}}$ である。したがって, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ であることに注意すると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = \boxed{\text{(く)}}$$

がわかる。