2023年度　慶應義塾大学　一般理系　第３問

問題　以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面上の曲線 $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ を C とする。a_1 を正の実数とし，点 $\mathrm{A}_1\left(a_1,\ \dfrac{1}{{a_1}^2}\right)$ における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の交点で A_1 と異なるものを $\mathrm{A}_2\left(a_2,\ \dfrac{1}{{a_2}^2}\right)$ とする。次に，点 A_2 における C の接線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と C の交点で A_2 と異なるものを $\mathrm{A}_3\left(a_3,\ \dfrac{1}{{a_3}^2}\right)$ とする。以下同様にして $n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対して，$\mathrm{A}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ における C の接線を ℓ_n とし，ℓ_n と C の交点で A_n と異なるものを $\mathrm{A}_{n+1}\left(a_{n+1},\ \dfrac{1}{{a_{n+1}}^2}\right)$ とする。

(1) $\dfrac{a_2}{a_1} = \boxed{（あ）}$ であり，$\dfrac{a_3}{a_1} = \boxed{（い）}$ である。

(2) a_n を a_1 を用いて表すと $a_n = \boxed{（う）}$ であり，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和 T を a_1 を用いて表すと $T = \boxed{（え）}$ である。

(3) a_1 を正の実数すべてにわたって動かすとき，三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の重心が描く軌跡の方程式を $y = f(x)$ の形で求めると，$f(x) = \boxed{（お）}$ となる。

(4) 三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ が鋭角三角形になるための条件は $\boxed{（か）} < a_1 < \boxed{（き）}$ である。

(5) x 軸上に 2 点 $\mathrm{A}_1{}'(a_1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2{}'(a_2,\ 0)$ をとり，台形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2{}'\mathrm{A}_1{}'$ の面積を S_1 とする。また，点 A_1 から点 A_3 にいたる曲線 C の部分，および線分 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2$ と $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1 : S_2 = \boxed{（く）} : \boxed{（け）}$ である。ただし $\boxed{（く）}$ と $\boxed{（け）}$ は互いに素な自然数である。