

2024年度 久留米大学 前期理系 第2問

**問題**  $OA = OB = \theta$ ,  $\angle AOB = 2\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ) である三角形  $OAB$  がある。点  $A$  から辺  $OB$  に下ろした垂線と辺  $OB$  との交点を  $P_1$ ,  $P_1$  から辺  $OA$  に下ろした垂線と辺  $OA$  との交点を  $P_2$ ,  $P_2$  から辺  $OB$  に下ろした垂線と辺  $OB$  との交点を  $P_3$  とする。このことを繰り返すことで  $P_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を定めていく。辺  $OP_n$  の長さを  $x_n$ , 線分  $P_nP_{n+1}$  の長さを  $y_n$ , 三角形  $OP_nP_{n+1}$  の面積を  $S_n$  とする。

(1)  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係式は  $x_{n+1} = (\text{ハ})x_n$  であり,  $x_n$  と  $y_n$  の関係式は  $y_n = (\text{ヒ})x_n$  であるから,  $x_n = \theta \cdot (\text{フ})^n$  であり,  $y_n = \theta \cdot (\text{ヒ}) \cdot (\text{フ})^n$  となる。

$\text{ハ}$ ,  $\text{ヒ}$ ,  $\text{フ}$  に当てはまるものを下の ①~⑤ の中から 1 つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

①  $\sin \theta$

①  $\cos \theta$

②  $\tan \theta$

③  $\sin 2\theta$

④  $\cos 2\theta$

⑤  $\tan 2\theta$

(2)  $T = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  とするとき,  $T = \frac{\theta \sin \text{ヘ} \theta}{\text{ホ} (1 - \cos \text{マ} \theta)}$  であり,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} T = \text{ミ}$  である。

(3)  $p$  を実数とする。  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^p \sqrt{S_n}$  が 0 以外の値に収束するような  $p$  の値は  $p = \frac{\text{ム} \times}{\text{モ}}$  であり, このときの極限値は  $\text{ヤ}$  である。