

問題 動物高校に通うウサギとクマの会話である。

ウサギ：従兄弟の子供が中学受験をするというので、問題集をやっていたんだ。

1より大きな数（小学生だから正の整数）があります。次の操作 T を考えます。

操作 T ：「数が2の倍数のときは2で割り、2の倍数でないときは1を足す。」

この操作 T を繰り返すと、いつか1になります。初めて1になったら、そこでやめます。

たとえば最初が5ならば、1を足して6になり、2で割ると3になり、次は1を足して4になり、次は2で割って2になり、次は2で割って1になります。これを次のようにかくことにします。

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

では、

$$\boxed{\text{III}} \rightarrow \boxed{\text{II}} \rightarrow \boxed{\text{I}} \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

となるとき、空欄にはどんな数が入るでしょうか？ すべて答えなさい。

クマ： $\boxed{\text{I}}$ は4が入るね。 T が「2で割るか、1を加える」だから、 T の逆操作は「2倍するか、1を引く」で、 $\boxed{\text{II}}$ は「 $\boxed{\text{I}}$ の2倍、または $\boxed{\text{I}}$ から1を引いたもの」だから、「8または3」だね。

(1) $\boxed{\text{III}}$ に入ることができる数は $\boxed{\text{リ}}$ 個ある。

クマ：ちょうど n 回で操作が終了する数はいくつあるんだろう。

ウサギ：塾で「 n 回で、場合の数の問題で、すぐに求められないなら、漸化式を立てる」と習った。やってみよう。うーん、これ、一般項に無理数が出るパターンだ。無理数が出ないように問題を変更しよう。

操作 U ：「1より大きな正の整数があるとき、それが c の倍数ならば、 c で割る。それが c の倍数でなければ、1, 2, 3, ..., $c-1$ のうち1つの数を加えて c の倍数になるようにする。」

これを繰り返して初めて1になったらやめる。一番初めの数を N として、 n 回の操作でやめるような N が a_n 個あるとする。 $c=2$ なら最初の問題と同じになるから、 $a_1=1, a_2=1, a_3=2$ になるってわけだ。

クマ：塾の先生は「後の方でタイプ分けする」か「最初でタイプ分けする」と言っていたね。最初でタイプ分けしてみよう。

n 回で操作が終了する a_n 個の N のうち、

N が c の倍数のものは『1回目に c で割る』から、あと $n-1$ 回で終了するので、 a_{n-1} 個あるね。

N が c の倍数でないものは、

『 N が c で割って余りが $c-1$ なら、1回目に1を加えて c の倍数にして（これで1回の操作）、次に c で割る（これが2回目の操作）』、

または『1回目に2を加えて c の倍数にして、次に c で割る』、...

または『1回目に $c-1$ を加えて c の倍数にして、次に c で割る』、

というタイプがある。これらは、今の時点で2回操作しているから、あと $\boxed{\text{ル}}$ 回で終了するね。

ウサギ：だから $n \geq 3$ として $a_n = a_{n-1} + \boxed{\text{レ}} \times a_{\boxed{\text{ロ}}} \cdots \textcircled{\text{A}}$ が成り立つね。

(2) $\boxed{\text{ル}}$, $\boxed{\text{レ}}$, $\boxed{\text{ロ}}$ に次に選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ。同じ番号を何回選んでもよい。

- ① $n-1$ ② $n-2$ ③ n ④ $c-1$ ⑤ $c+1$
⑥ c

(3) ㉔ から得られる方程式 $x^2 - x - \square = 0$ が整数解をもつのは、0 以上の整数 k を用いて $\square c - \square = (2k+1)^2$ の形でかけるときである。このとき、 $c = k^2 + k + \square$ となる。

特に、この $k = 2$ のときは、 $a_2 = 6$ 、 $a_n = \frac{1}{\square} \left(\square \cdot \square^{n-1} - \square \cdot (-\square)^{n-1} \right)$ となる。

S_kurume2025A_04.pbm