

2024年度 杏林大学 前期理系 第1問

問題 の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

原点を O とする座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 10$ と直線 $l: y = ax - 4a + 2$ がある。ただし、 a は実数の定数とする。

(1) 直線 l は、その傾き a の値によらず定点 F (,) を通る。
 定数 a を変化させたとき、円 C と接するような直線 l は 2 本存在する。これらの直線と円 C との接点を P , Q とすると、短い方の弧 PQ の長さは $\frac{\sqrt{\text{ウエ}}}{\text{オ}}\pi$ である。

(2) 直線 l が円 C と異なる 2 点で交わる時、その交点を R, S とする。
 線分 RS の中点を M とすると、 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FM} = \text{カ}$ が成り立つ。定数 a を変化させたとき、点 M が描く軌跡は、原点 O を通り の一部である。

また、定数 a を変化させた場合に $\triangle ORS$ の面積が最大となるのは、原点と直線 l の距離が $\sqrt{\text{ク}}$ であり、 $a = \frac{\text{ケ} \pm \text{コ} \sqrt{\text{サ}}}{\text{シス}}$ のときである。

の解答群

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| ① 点 F を焦点とする放物線 | ② 点 F を中心とする円 |
| ③ 線分 FO を直径とする円 | ④ 線分 FO を一辺にもつ正三角形の外接円 |
| ⑤ 点 F を焦点の 1 つとする楕円 | ⑥ 線分 FO を長軸とする楕円 |
| ⑦ 点 F を焦点の 1 つとする双曲線 | ⑧ 2 点 F, O を頂点とする双曲線 |

(3) 点 $T(u, v)$ を直線 l と楕円 $E: \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$ の共有点とする。

$\vec{\alpha} = \left(\frac{u}{\sqrt{10}}, \frac{v}{2} \right)$, $\vec{\beta} = (a\sqrt{10}, -2)$ とおくと、点 T が直線 l 上にあることから

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \text{セ} a - \text{ソ}$ が成立する。また、点 T が楕円 E 上にあることから $|\vec{\alpha}| = \text{タ}$ がいえる。

$-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ より、直線 l と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は

$\text{チ} \leq a \leq \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ とわかる。

$a = \text{チ}$ のとき、直線 l は楕円 E と点 (,) で接し、直線 l が円 C によって切り取られる線分 RS の長さは $\text{ニ} \sqrt{\text{ヌ}}$ である。