2024 年度　杏林大学　前期理系　第３問

問題　$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ一つずつ選べ。

原点を O とする複素数平面上に 2 点 A(α), B(β) がある。ただし，i を虚数単位として $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $\beta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であり，$\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とする。$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表し，複素数 z の偏角 $\arg z$ の範囲は $0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする。

(1)　γ の実部を s，虚部を t とすると，

$$s = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$|\gamma| = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \arg\gamma = \frac{\pi}{\boxed{\text{カキ}}}$$

が成り立つ。

また，2 点 O，B を通る直線に関して点 A と対称な点 D(δ) について

$$\arg\frac{\delta - \alpha}{\beta} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$$

が成り立ち，

$$\delta = \alpha \times \frac{i + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を満たす。

(2)　自然数 n に対して γ^n が純虚数となる最小の n は $\boxed{\text{シ}}$ である。

また，$|\gamma^{-n}| > 2024$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

(3)　2 点 O，A を通る直線に関して点 P(z) と対称な点を表す複素数を $\overset{*}{z}$ と表記する。自然数 n について，次の式で表される複素数平面上の点列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_1 = \beta,\qquad z_{n+1} = z_n + \gamma(\overset{*}{z}_n - z_n),\qquad (\text{ただし } n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ の角度で交わる直線上に存在する。

また，$\arg z_n + \arg \overset{*}{z}_n = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，z_n の極形式を考えると任意の自然数 n に対して $\overset{*}{z}_n = \boxed{\text{チ}}$ と表せるので，点列 $\{z_n\}$ は次式を満たす。

$$\overset{*}{z}_{n+1} = \overset{*}{z}_n + \boxed{\text{ツ}} \times (z_n - \overset{*}{z}_n),\qquad (\text{ただし } n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

自然数 n に対し $\left|\overset{*}{z}_n - z_n\right|$ は，公比 $\boxed{\text{テト}}\,s + \boxed{\text{ナ}}$ の等比数列（ただし s は γ の実部）をなし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\overset{*}{z}_n - z_n\right| = \boxed{\text{ニ}}$ となる。

以上から，

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad \lim_{n\to\infty}|z_n| = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}s$$

とわかる。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

① iz_n　② $-z_n$　③ $-iz_n$　④ $\dfrac{1}{z_n}$　⑤ $\overline{z_n}$

⑥ $i\overline{z_n}$　⑦ $-\overline{z_n}$　⑧ $-i\overline{z_n}$　⑨ $(\overline{z_n})^{-1}$　⓪ $i(\overline{z_n})^{-1}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① γ　② $i\gamma$　③ $(-\gamma)$　④ $(-i\gamma)$

⑤ $\overline{\gamma}$　⑥ $i\overline{\gamma}$　⑦ $(-\overline{\gamma})$　⑧ $(-i\overline{\gamma})$

S_kyorin2024A_03.pbm