

2024年度 日本医科大学 前期理系 第1問

問題 角 α を $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, かつ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ となるようにとる。三角形 OAB は $OA = 2, OB = 3, \alpha < \angle AOB < \frac{\pi}{2}$ を満たすとし、三角形 OAB の垂心を H とする。 $x = \cos \angle AOB$ とおくと、以下の各問の ア ~ シ に入る適切な数を求めよ。ただし、 ウ ~ シ は 1 以上の整数で答えよ。また ス に関しては下の指示に従うこと。

(1) x の動く範囲は ア $< x <$ イ である。

(2) ベクトル \vec{OH} は次のように表せる。

$$\vec{OH} = \frac{x(\text{ウ} - \text{エ}x)}{\text{オ}(1-x^2)}\vec{OA} + \frac{x(\text{カ} - \text{キ}x)}{\text{ク}(1-x^2)}\vec{OB}$$

(3) 三角形 HAB の面積 $S(x)$ は次のように表せる。

$$S(x) = \frac{\text{ケ}x^2 - \text{コ}x + \text{サ}}{\text{シ}\sqrt{1-x^2}}$$

(4) x が (1) で求めた範囲を ア から イ まで動くとき (ただし、端点は除く), (3) の $S(x)$ は, ス 。

上記の文中の ス に当てはまるものを、次の (あ)~(え) の中から 1 つ選べ。なお、以下の選択肢において、 c は ア $< c <$ イ を満たす定数とする。ただし、 ア と イ には (1) で求めた数が入る。

(あ) 単調に増加する

(い) 単調に減少する

(う) ア $< x < c$ で増加し, $c < x <$ イ で減少する

(え) ア $< x < c$ で減少し, $c < x <$ イ で増加する