

2024年度 日本医科大学 前期理系 第2問

問題 以下では $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$, m とする。中が見えない袋の中に、互いに区別のつかない白玉が m 個、互いに区別のつかない赤玉が n 個入っている。この袋の中から無作為に1個の玉を取り出し、その玉の色を確認したあとに取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返す。この試行において赤玉が k 回取り出される確率を $p_{m,n}(k)$ とし、 $q_{m,n}$, R_n , $S_n(k)$ を次式で定めるとき、以下の各問いに答えよ。

$$q_{m,n} = \sum_{k=0}^m 2^k \cdot p_{m,n}(k), \quad R_n = \lim_{m \rightarrow \infty} q_{m,n}, \quad S_n(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,n}(k)$$

(1) $q_{m,n}$ は

$$q_{m,n} = \left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表せる。 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な m , n の整式を求めよ。答えのみでよい。

(2) 極限 R_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

(3) 極限 $S_n(k)$ を n , k を用いて表せ。答えのみでよい。

(4) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N R_n \cdot S_n(3) \right\}$$