2024 年度　日本医科大学　前期理系　第４問

問題　k を正の定数とする。O を原点とする座標空間において，zx 平面内の曲線 $C_1 : z^2 - x^2 = 1\ (z > 0)$，および xy 平面内の楕円 $C_2 : k^2x^2 + \dfrac{k^2}{k+1}y^2 = 1$ を考える。zx 平面内の C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2})$（ただし，$t \geqq 0$）における C_1 の接線を L_1 とし，L_1 と直線 $x = z$ の交点を Q，L_1 と直線 $x = -z$ の交点を R とする。また，楕円 C_2 の焦点のうち y 座標が正の点を F とし，座標空間において直線 L_1 と点 F を通る平面を π とする。平面 π と xy 平面の交線を L_2 とし，直線 L_2 と楕円 C_2 の相異なる 2 つの交点を S，T とする。このとき，以下の各問いに答えよ。ただし，空間内の相異なる 2 点 X，Y に対して，XY は線分 XY の長さを表す。

(1)　次の方程式が zx 平面内の直線 L_1 を表すように，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

(2)　次の方程式が平面 π を表すように，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な式を k を用いて表せ。答えのみでよい。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には (1) で求めた式が入る。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,y + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

(3)　QR を t を用いて表せ。また，ST を t，k を用いて表せ。答えのみでよい。

(4)　0 以上の実数 t に対して $f_k(t) = \dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}$ と定める。$f_k(t)$ を t の関数と考えたとき，$f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件を求めよ。

S_nichii2024A_04.pbm